МатриУМ

Задачник ФТШ

подготовка к поступлению в 8 класс

лицей «Физико-техническая школа» им. Ж. И. Алфёрова

математика и физика

---

17 глав: теория, разобранные примеры, типичные ошибки
более 600 задач трёх уровней, подсказки к трудным задачам
5 тренировочных вариантов: 6 задач по математике и 4 по физике
входная диагностика, работы на повторение, лист прогресса

Т. Г. Крылов

Санкт-Петербург, 2026

Как пользоваться задачником

Как устроена книга. Две части — математика (главы 1–9) и физика (главы 10–17), — смешанные работы на повторение после каждой части и 5 тренировочных вариантов в формате вступительной: 6 задач по математике и 4 по физике.

Как устроена глава.

1. **Теория.** То, что нужно понимать и уметь применять. Читайте с ручкой, проверяйте каждый переход, выводы формул повторяйте сами.
2. **Разобранные примеры** — главные приёмы главы. Сначала попробуйте решить пример сами, закрыв решение, потом сравните.
3. **Типичные ошибки** — то, на чём чаще всего теряют баллы. Возвращайтесь к этому списку, когда находите ошибку в своём решении.
4. **Задачи по уровням:** базовый — проверка понимания теории; средний — уровень вступительных; сложный и «в стиле вступительной ФТШ» — уровень последних задач работы (многие составлены по сюжетам вступительных работ и олимпиад лицея с новыми числами); «для закрепления» — ещё задачи по главным приёмам.
5. **Проверь себя** — список умений. Отметьте те, в которых уверены.

Как работать с трудной задачей — три ступени помощи.

1. Подумайте над задачей не меньше 15–20 минут. Нарисуйте схему, обозначьте неизвестные, попробуйте частный случай или маленькие числа.
2. Если не получается, откройте **подсказку** — она в конце книги, в разделе «Подсказки». Подсказка есть у всех трудных задач, рядом с ответом у них стоит пометка *есть подсказка*. Подсказка — это первый шаг, а не решение: после неё снова попробуйте сами.
3. Только после этого читайте **полное решение** в разделе «Решения». Прочитав его, закройте книгу и запишите решение сами.

Ответ под задачей серым — для проверки уже после того, как задача решена.

Тетрадь ошибок. Номера задач, которые не получились с первого раза, записывайте в «Лист прогресса» в конце книги. Через неделю решите их заново, не глядя в решение. Именно такие повторные решения дают самый большой рост.

С чего начать. Решите **входную диагностику** — 17 задач, по одной на каждую главу. Главы, задачи из которых не получились, изучайте в первую очередь.

Оформление. Задачи с доказательством записывайте полными предложениями: на вступительной оценивается обоснование, а не только ответ. В физике, если не сказано иное, $g = 10$ Н/кг, плотность воды 1000 кг/м^3; плотности веществ — в справочнике в конце книги. Всегда пишите единицы измерения рядом с числами.

Тренировочные варианты решайте как настоящую работу: подряд, без подсказок и без книги, с полными решениями. Проверяйте себя по решениям в конце книги.

Содержание

Входная диагностика 4

1. Вычисления, дроби, сравнения 5

2. Делимость, остатки, цифры 10

3. Алгебра: преобразования, уравнения, системы 15

4. Текстовые задачи: движение, работа, проценты 20

5. Логика: рыцари и лжецы, взвешивания, турниры 26

Входная диагностика

17 задач — по одной на каждую главу. Решите их до начала работы с книгой

Решайте задачи по порядку, не подглядывая в теорию; на всю работу отведите около полутора часов. Ответы и решения — в конце книги, в разделе «Решения». После проверки отметьте в таблице на последней странице книги («Лист прогресса»), какие задачи не получились: соответствующие главы стоит изучать в первую очередь и особенно внимательно.

Математика

Д.1. Вычислите: $98 \cdot 102 - 99 \cdot 101$.

Д.2. Найдите последнюю цифру числа 2^{2026}.

Д.3. Решите систему $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$

Д.4. Собственная скорость лодки 12 км/ч, скорость течения 2 км/ч. Сколько времени лодка затратит на путь в 35 км по течению и обратно?

Д.5. A сказал: «B — лжец». B сказал: «Мы с A — одного типа». Кто из них рыцарь, а кто лжец?

Д.6. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны?

Д.7. На столе 15 спичек. Двое по очереди берут 1, 2 или 3 спички. Выигрывает тот, кто взял последнюю. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Д.8. Один из углов треугольника равен $40°$, а другой на $20°$ больше третьего. Найдите неизвестные углы.

Д.9. Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если цифры переставить, число увеличится на 27. Найдите это число.

Физика

Д.10. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость.

Д.11. Найдите массу стального бруска размером $10 \times 5 \times 2$ см (плотность стали 7,8 г/см^3).

Д.12. К пружине жёсткостью 50 Н/м подвесили груз массой 300 г. Найдите удлинение пружины.

Д.13. Найдите давление воды на глубине 2,5 м (без учёта атмосферного давления).

Д.14. Брусок плотностью 600 кг/м^3 плавает в воде. Какая часть его объёма находится над водой?

Д.15. Груз массой 12 кг подвешен к рычагу на расстоянии 30 см от оси. Какую силу нужно приложить с другой стороны на расстоянии 90 см от оси, чтобы рычаг был в равновесии?

Д.16. Какую работу нужно совершить, чтобы равномерно поднять груз массой 25 кг на высоту 4 м?

Д.17. На шкале мензурки подписаны отметки 0 и 50 мл, а между ними 10 делений. Найдите цену деления.

Глава 1. Вычисления, дроби, сравнения

рациональный счёт, сравнение дробей и степеней, телескопические суммы, оценки

Теория

1. Законы действий — главный инструмент рационального счёта

Переместительный, сочетательный и распределительный законы позволяют менять порядок действий так, чтобы считать было удобно. Особенно важен распределительный закон, который работает в обе стороны:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \text{и} \qquad ab + ac = a(b+c).$$

Вынесение общего множителя — первое, что нужно попробовать, если в выражении есть одинаковые сомножители: $37 \cdot 46 + 37 \cdot 54 = 37 \cdot (46 + 54) = 3700$. Иногда общий множитель «спрятан»: $1{,}25 \cdot 44 - 12{,}5 \cdot 2{,}4 = 1{,}25 \cdot 44 - 1{,}25 \cdot 24 = 1{,}25 \cdot 20 = 25$.

2. Формулы сокращённого умножения в вычислениях

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Формулы полезно читать в обе стороны. Особенно часто используется следствие разности квадратов: произведение двух чисел, симметричных относительно n, равно

$$(n-k)(n+k) = n^2 - k^2.$$

Например, $2026 \cdot 2028 = 2027^2 - 1$, $98 \cdot 102 = 10\,000 - 4 = 9996$. Квадрат числа, близкого к круглому: $999^2 = (1000-1)^2 = 1\,000\,000 - 2000 + 1 = 998\,001$.

Приём «обозначь число буквой». Если в выражении много раз встречаются близкие большие числа, обозначьте одно из них буквой: при $n = 123456789$ выражение $n^2 - (n-1)(n+1)$ сразу равно 1.

3. Сравнение дробей: пять способов

1. **Общий знаменатель или общий числитель.** Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше: $\frac{7}{19} > \frac{7}{20}$.
2. **«Перекрёстное» умножение.** Для положительных дробей $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc$. Надёжно, но для больших чисел неудобно.
3. **Дополнение до единицы.** Дроби, близкие к 1, сравнивают по «недостаче»:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

   Чем меньше недостача, тем больше дробь. Поэтому $\frac{2026}{2027} < \frac{2027}{2028}$.
4. **Сравнение с ориентиром.** Если одна дробь больше $\frac{1}{2}$, а другая меньше — всё ясно. Если обе близки к $\frac{1}{2}$, сравнивайте отклонения: $\frac{23}{47} = \frac{1}{2} - \frac{1}{94}$.
5. **Выделение целой части** у неправильных дробей: $\frac{10^{11}+10}{10^{11}+1} = 1 + \frac{9}{10^{11}+1}$.

4. Сравнение степеней

Нужно привести степени либо к одинаковому *показателю*, либо к одинаковому *основанию*:

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}, \qquad 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10} \quad \Rightarrow \quad 2^{30} < 3^{20}.$$

Если точно привести нельзя, используют промежуточное число: $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$.

5. Телескопические суммы и произведения

Если каждое слагаемое записать как разность двух соседних выражений, то при сложении почти всё сократится:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right).$$

Проверка: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Аналогично в произведениях сокращаются соседние множители:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

6. Оценки

Чтобы доказать, что сумма больше (меньше) какого-то числа, каждое слагаемое заменяют наименьшим (наибольшим). В сумме $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{20}$ десять слагаемых, каждое не меньше $\frac{1}{20}$ — сумма не меньше $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Если оценка «всей суммы сразу» слишком грубая, разбейте слагаемые на группы и оценивайте каждую группу отдельно.

Разобранные примеры

Пример 1. Сравните $\dfrac{2026}{2027}$ и $\dfrac{2027}{2028}$.

Решение. $\frac{2026}{2027} = 1 - \frac{1}{2027}$, $\frac{2027}{2028} = 1 - \frac{1}{2028}$. Так как $\frac{1}{2027} > \frac{1}{2028}$, у первой дроби недостача больше. **Вторая дробь больше.**

Пример 2. Вычислите $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Решение. Каждое слагаемое $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Сумма равна

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{99} - \tfrac{1}{100}\right) = 1 - \tfrac{1}{100} = \tfrac{99}{100}.$$

Пример 3. Придумайте натуральное число, которое можно прибавить к произведению $2025 \cdot 2026 \cdot 2027$, чтобы получился куб натурального числа.

Решение. Обозначим $n = 2026$. Тогда $2025 \cdot 2027 = n^2 - 1$ и произведение равно $n(n^2-1) = n^3 - n$. Прибавив $n = 2026$, получим 2026^3. **Ответ:** например, 2026. (сюжет вступительной олимпиады ФТШ 2026 г.)

Пример 4. Что больше: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100}?

Решение. $2^{100} + 3^{100} < 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100}$. Покажем, что $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$, т. е. $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^{100}$. Уже $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} > 2$, а остальные множители больше 1. **Ответ:** 4^{100} больше.

Типичные ошибки

- Считают «в лоб» многозначные произведения вместо того, чтобы вынести общий множитель или применить формулу $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$.
- Сравнивают дроби с большими числами, приводя к общему знаменателю, — долго и с ошибками. Сначала проверьте «недостачу до 1» или ориентир $\frac{1}{2}$.
- При сравнении степеней приводят к общему основанию там, где проще общий показатель ($2^{30} = 8^{10}$, $3^{20} = 9^{10}$), и наоборот.
- В телескопической сумме теряют множитель: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, а не $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$. Всегда проверяйте разложение обратным сложением.
- В оценках «каждое слагаемое меньше…» забывают, что нужна *строгая* оценка хотя бы для одного слагаемого, если требуется строгое неравенство.

Глава 13. Давление твёрдых тел, жидкостей и газов

давление, закон Паскаля, давление столба жидкости, сообщающиеся сосуды, гидравлический пресс, атмосферное давление

Теория

1. Давление

Давление — сила, действующая перпендикулярно поверхности, делённая на площадь этой поверхности:

$$p = \frac{F}{S}, \qquad 1\ \text{Па} = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Переводя площади, возводите множитель в квадрат: $1\ \text{см}^2 = (0{,}01\ \text{м})^2 = 10^{-4}\ \text{м}^2$, $1\ \text{мм}^2 = 10^{-6}\ \text{м}^2$. Давление сплошного тела постоянной высоты h (куб, цилиндр, кирпич на грани) на опору равно $p = \frac{\rho V g}{S} = \rho g h$.

2. Давление жидкости и газа. Закон Паскаля

Молекулы жидкости и газа давят на стенки сосуда и на любые тела внутри. **Закон Паскаля:** давление, производимое на жидкость или газ, передаётся без изменения в каждую точку жидкости и во всех направлениях.

3. Давление столба жидкости

Рассмотрим вертикальный столбик жидкости высотой h и площадью основания S. Его вес $\rho S h g$ давит на площадку S, поэтому давление на глубине h:

$$p = \rho g h \quad (\text{плюс давление на поверхности, например атмосферное}).$$

Давление зависит только от глубины и плотности, но *не* от формы сосуда. Поэтому сила давления на дно $F = pS = \rho g h S$ может отличаться от веса жидкости: в сосуде, расширяющемся кверху, часть веса держат стенки, и сила на дно меньше веса; в сужающемся — больше. Если в сосуде несколько несмешивающихся слоёв, давления слоёв складываются: $p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \dots$

Сила давления на вертикальную стенку прямоугольного аквариума: давление растёт от 0 у поверхности до $\rho g h$ у дна равномерно, поэтому среднее давление $\frac{\rho g h}{2}$ и сила $\frac{\rho g h}{2} \cdot S_{\text{стенки}}$.

4. Сообщающиеся сосуды

В сообщающихся сосудах с однородной жидкостью уровни одинаковы. Если жидкости разные, нужно приравнять давления *на одном горизонтальном уровне внутри одной и той же жидкости* — удобнее всего на уровне границы раздела:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2,$$

где h_1, h_2 — высоты столбов над этой границей. Если сосуды одинаковой площади стоят на одном столе, то из равенства давлений на дно следует равенство масс жидкости в них.

Закон сохранения объёма. Если в одном колене жидкость опустилась на x, то в другом она поднялась на $x\frac{S_1}{S_2}$ — объём перетёкшей жидкости одинаков. Разность уровней при этом меняется на $x + x\frac{S_1}{S_2}$, а не на x!

5. Гидравлический пресс и поршни

Под поршнями на одном уровне давление одинаково: $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$. Выигрыш в силе $\frac{S_2}{S_1}$ сопровождается таким же проигрышем в перемещении: $S_1 h_1 = S_2 h_2$. Если поршни на разной высоте, добавляется давление столба жидкости между ними: $\frac{F_{\text{на поршень}}}{S} = \rho g h$, где h — превышение уровня жидкости над поршнем.

Тренировочный вариант 1

математика — 6 задач, физика — 4 задачи; каждую задачу нужно решить с полным обоснованием

Математика

B1.1. Найдите все натуральные n, при которых $n^2 + 15$ — квадрат натурального числа.

B1.2. В классе 25 учеников, каждый — рыцарь или лжец. Каждый сказал: «Среди остальных учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько в классе рыцарей?

B1.3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На стороне AC отмечена точка D так, что $BD = AD$ и $\angle DBC = 66^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

B1.4. Спускаясь пешком по движущемуся вниз эскалатору, Лёша наступил на 50 ступенек, а Юра, шагавший вдвое быстрее (относительно ступенек), — на 60. а) Во сколько раз меньше времени затратил на спуск Юра? б) Сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

B1.5. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел $1, 2, \ldots, 30$ так, чтобы сумма никаких двух выбранных не делилась на 5?

B1.6. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 10$. За ход разрешается увеличить любые два числа на 1. Можно ли за несколько ходов сделать все числа равными?

Физика

B1.7. **Метро.** Поезд метро разгоняется от 0 до 15 м/с за 10 с (скорость растёт равномерно), затем 100 с едет с постоянной скоростью, за 10 с равномерно тормозит до остановки, стоит на станции 30 с и снова трогается; расстояния между всеми станциями одинаковы. А) Найдите расстояние между станциями. Б) Найдите среднюю скорость поезда на линии в км/ч. В) Сколько перегонов проедет поезд за 20 минут после первого отправления?

B1.8. **Латунь.** Кусок латуни (сплав меди и цинка) массой 1,6 кг имеет объём 200 см^3. Плотность меди 8,9 г/см^3, цинка 7,1 г/см^3. А) Найдите массу меди в куске. Б) Какой станет плотность, если добавить ещё 178 г меди?

B1.9. **Три жидкости.** В U-образную трубку налита ртуть. В левое колено налили столб воды высотой 27,2 см, а в правое — керосин (0,8 г/см^3) так, что уровни ртути в коленах оказались одинаковыми. А) Найдите высоту столба керосина. Б) На сколько верхний уровень керосина выше верхнего уровня воды?

B1.10. **Весы и брусок.** Сосуд с водой стоит на весах, они показывают 2 кг. В воду на нити опускают алюминиевый брусок массой 540 г так, что он полностью погружён и не касается дна. А) Что покажут весы? Б) Найдите натяжение нити. В) Что покажут весы, если брусок положить на дно, а нить отпустить?

Подсказки

первый шаг к решению трудных задач; открывайте только после самостоятельной попытки

Глава 1. Вычисления, дроби, сравнения

1.20. Найдите разность $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ и сравните её со слагаемым.

1.21. Разбейте слагаемые на группы $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}$ и оцените каждую группу снизу.

1.22. Рассмотрите «соседнее» произведение $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{100}{101}$. Какое из двух больше и чему равно их произведение?

1.23. Умножьте обе дроби на 10 и выделите целую часть.

1.24. Обозначьте $a=2026$ и вспомните формулу суммы кубов.

1.25. Обозначьте $n=2000$ и запишите $1999\cdot 2001$ через n.

1.26. Обозначьте первое число n и выразите обе суммы через n.

1.27. Приведите степени к одинаковому показателю.

1.28. Разбейте сумму на две группы, каждая из которых больше $\frac{1}{2}$.

1.29. Каждое слагаемое знаменателя первой дроби вдвое больше соответствующего слагаемого числителя. Вторая сумма — телескопическая.

1.30. Замените $\frac{1}{n^2}$ на большее число $\frac{1}{(n-1)n}$.

1.31. Обозначьте $a=2027$, $b=2026$ и вспомните, что $a-b=1$, поэтому $1=(a-b)^2$.

1.36. Разбейте сумму на две половины по 50 слагаемых и оцените каждую половину снизу.

Глава 2. Делимость, остатки, цифры

2.21. Представьте n^2+1 как $(n-1)(n+1)+\ldots$

2.22. Нужно, чтобы разность сумм цифр на нечётных и чётных местах делилась на 11. Сумма всех цифр равна 45.

2.23. Найдите две последние цифры числа 7^4.

2.24. Ищите n в виде 2^a3^b и запишите условия на чётность и делимость на 3 показателей.

2.25. Рассмотрите остатки при делении на 3.

2.26. Запишите числа как $24x$ и $24y$, где x и y взаимно просты.

2.27. Сколько пятёрок в разложении $60!$ на простые множители?

2.28. Начните с $1,2,3$: их сумма 6. Добавляйте каждый раз сумму уже выбранных чисел.

2.29. На какие цифры может оканчиваться квадрат?

2.30. Разность двух квадратов равна 41 — разложите её на множители.

2.31. Обозначьте число этажей F; в подъезде $4F$ квартир. Запишите номер квартиры Пети через номер подъезда.

2.32. $a=24x$, $b=24y$, $x+y=8$, x и y взаимно просты.

2.33. $\overline{aaa}=111a$, а $111=3\cdot 37$.

2.34. $2^{15}-1=(2^5-1)(2^{10}+2^5+1)$ и $2^{10}-1=(2^5-1)(2^5+1)$.

2.36. Условие означает, что $n^2-n=n(n-1)$ делится на 100.

2.37. Если $n=p^aq^b$, то делителей $(a+1)(b+1)$. Как получить 10?

Глава 3. Алгебра: преобразования, уравнения, системы

3.21. Умножьте равенство на 2 и соберите три квадрата разностей.

3.22. Умножьте на 2 и запишите разность как сумму трёх квадратов.

3.23. Возведите $a+b+c=0$ в квадрат. Для четвёртых степеней возведите в квадрат $a^2+b^2+c^2$.

3.24. $(x-y)(x+y)=15$. Не забудьте отрицательные делители.

3.25. Вычтите из второго уравнения первое, из третьего — второе.

3.26. Раскройте скобки в $(x+1)(y+1)$.

3.27. $(x+1)^2-x^2=2x+1$. Что можно сказать о сумме чисел?

3.28. Выразите возраст каждого сына через возраст отца F.

Это ознакомительный фрагмент

Задачник ФТШ · подготовка к поступлению в 8 класс

Во фрагменте — титульный лист, «Как пользоваться задачником», входная диагностика, начало глав 1 и 13, тренировочный вариант и страница подсказок. В полной версии:

- 120 страниц, 17 глав по математике и физике;
- подробная теория, разобранные примеры и типичные ошибки в каждой главе;
- 601 задача: от базового уровня до задач по сюжетам вступительных ФТШ;
- подсказки к трудным задачам и полные решения;
- входная диагностика, работы на повторение и лист прогресса;
- 5 тренировочных вариантов в формате вступительной: 6 задач по математике и 4 по физике;
- справочник: формулы, плотности веществ, главные факты.

Полная версия — на сайте МатриУМ

matriumschool.ru/zadachniki/ftsh-8

доступ откроется в личном кабинете сразу после оплаты